ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ KIM NGÂN

MỘT VÀI TÍNH CHẤT SỐ HỌC CỦA CÁC DÃY SỐ ĐƯỢC XÂY DỰNG TỪ CÁC DÃY SỐ CỦA ROETTGER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ KIM NGÂN

MỘT VÀI TÍNH CHẤT SỐ HỌC CỦA CÁC DÃY SỐ ĐƯỢC XÂY DỰNG TỪ CÁC DÃY SỐ CỦA ROETTGER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**

Mã số: **60 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục ký hiệu

$u_n = u_n(p,q)$	số hạng thứ n của dãy Lucas
$v_n = v_n(p,q)$	số hạng thứ n của dãy Lucas
$c_n = c_n(P,Q,R)$	số hạng thứ n của dãy Roettger
$w_n = w_n(P,Q,R)$	số hạng thứ n của dãy Roettger
U_n, V_n	các dãy Roettger mở rộng
$\gcd(a,b)$	ước chung lớn nhất của hai số a, b
$\{D_n\}$	dãy D_n
$\{E_n\}$	dãy E_n
$a \mid b$	a là ước của b
$a \nmid b$	a không là ước của b
ω	hạng phân bố của m trong $\{D_n\}$
$a^\lambda \| b$	a^λ là ước của b nhưng $a^{\lambda+1}$ không là ước của b

Mở đầu

Dãy số Fibonaci là một trong những vẻ đẹp đặc biệt trong kho tàng Toán học, nó vô cùng biến hóa với nhiều tính chất lý thú và ứng dụng quan trọng. Dãy Fibonaci được công bố bởi nhà toán học Ý tên là Leonardo Pisano Bogollo (tên thường gọi là Fibonaci) vào năm 1202 trong cuốn sách Liber Abacci. Nói đến dãy Fibonaci không thể không nói đến dãy số Lucas bởi chúng có mối liên hệ chặt chẽ với nhau.

Dãy số Lucas là dãy số được đưa ra bởi nhà toán học Francois E'douard Anatole Lucas (1842-1891). Cũng giống như dãy số Fibonaci, mỗi số trong dãy Lucas được xác định bằng tổng hai số liền nhau đứng trước nó. Dãy số được xác định bởi thương của 2 số Lucas đứng liền nhau sẽ hội tụ đến giới hạn bằng tỉ lệ vàng, đây là một con số diệu kỳ, lí tưởng trong toán học cũng như trong tự nhiên. Việc nghiên cứu các dãy số tương tự như dãy số Lucas đã được rất nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm và có rất nhiều kết quả lý thú.

Cho $p, q \in \mathbb{Z}$ là hai số nguyên thỏa mãn $(p, q) = 1$, ký hiệu α, β là nghiệm của đa thức bậc hai $x^2 - px + q$ và $\delta = (\alpha - \beta)^2 = p^2 - 4q$. Lucas đã xây dựng hai dãy số của ông là $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ xác định như sau:

$$u_n = u_n(p, q) = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta) \quad \text{và} \quad v_n = v_n(p, q) = \alpha^n + \beta^n.$$

Chúng ta đã biết các dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ có nhiều tính chất thú vị và có nhiều ứng dụng trong toán học và thực tế.

Một cách tương tự như Lucas, Roettger đã xây dựng các dãy $\{c_n\}$ và $\{w_n\}$ như sau: Cho $P, Q, R \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $(P, Q, R) = 1$, và α, β, γ là nghiệm của đa thức bậc ba $h(x) = x^3 - Px^2 + Qx - R$, với biệt thức

$$\Delta = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 = Q^2P^2 - 4Q^3 - 4RP^3 + 18PQR - 27R^2 \neq 0.$$

Các dãy số Roettger được định nghĩa bởi:

$$c_n = c_n(P, Q, R) = \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\beta^n - \gamma^n)(\gamma^n - \alpha^n)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}$$

và

$$w_n = w_n(P, Q, R) = (\alpha^n + \beta^n)(\beta^n + \gamma^n)(\gamma^n + \alpha^n) - 2R^n.$$

Người ta đã chứng minh được rằng các dãy $\{c_n\}$ và $\{w_n\}$ có nhiều tính chất tương tự những tính chất của dãy Lucas, ví dụ chúng đều là các dãy chia được. Gần đây nhất, các dãy này tiếp tục được mở rộng thêm bởi Roettger, Williams và Guy.

Nếu ta ký hiệu $\gamma_1 = \alpha/\beta, \gamma_2 = \beta/\gamma, \gamma_3 = \gamma/\alpha, \lambda = R$, thì ta có thể viết:

$$\begin{aligned} c_n &= \lambda^{n-1} \frac{(1 - \gamma_1^n)(1 - \gamma_2^n)(1 - \gamma_3^n)}{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_3)}, \\ w_n &= v_n - 2R^n, \end{aligned}$$

trong đó $v_n = \lambda^n(1 + \gamma_1^n)(1 + \gamma_2^n)(1 + \gamma_3^n)$. Ta xác định

$$U_n = \frac{\lambda^{n-1}(1 - \gamma_1^n)(1 - \gamma_2^n)(1 - \gamma_3^n)}{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_3)}, V_n = \lambda^n(1 + \gamma_1^n)(1 + \gamma_2^n)(1 + \gamma_3^n),$$

trong đó $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda \in \mathbb{Q}$ với $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \neq 1; \gamma_i \neq \gamma_j$ khi $i \neq j$ và $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1$. Người ta đã chứng minh được nếu $U_n, V_n \in \mathbb{Z}$ khi $n \geq 0$, thì $\{U_n\}$ là dãy đệ quy tuyến tính và cũng là dãy chia được, và khi đó ta có $\lambda = R \in \mathbb{Z}$ và $\rho_i = R(\gamma_i + 1/\gamma_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ là các nghiệm của đa thức bậc ba

$$g(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3,$$

trong đó $S_3 = RS_1^2 - 2RS_2 - 4R^3$ và $S_1, S_2 \in \mathbb{Z}$.

Ta có $R\gamma_i$ và R/γ_i $(i = 1, 2, 3)$ là sáu nghiệm của đa thức

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^2 - \rho_1 x + R^2)(x^2 - \rho_2 x + R^2)(x^2 - \rho_3 x + R^2) \\ &= x^6 - S_1x^5 + (S_2 + 3R^2)x^4 - (S_3 + 2R^2S_1)x^3 \\ &\quad + R^2(S_2 + 3R^2)x^2 - R^4S_1x + R^6. \end{aligned}$$

Đặt $W_n = V_n - 2R^n$, thì ta sẽ nhận được các dãy $\{U_n\}$ và $\{W_n\}$ là các dãy đệ quy tuyến tính với đa thức đặc trưng $G(x)$.

Ta xác định

$$D_n = \gcd(W_n - 6R^n, U_n),\ \ E_n = \gcd(W_n, U_n).$$

Ta nhận được các dãy $\{D_n\}$ và $\{E_n\}$ cũng có nhiều tính chất số học tương tự như các dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$.

Mục đích của luận văn là nghiên cứu và trình bày các tính chất số học của các dãy $\{D_n\}$ và $\{E_n\}$. Luận văn gồm 4 chương chính là:

Chương 1: Các dãy của Roettger và các kết quả liên quan

Trong chương này trình bày các định nghĩa và các tính chất quan trọng (không chứng minh) của các dãy Lucas, Roettger.

Chương 2: Dãy $\{D_n\}$

Trình bày định nghĩa dãy $\{D_n\}$, các tính chất số học của dãy $\{D_n\}$.

Chương 3: Dãy $\{E_n\}$

Trình bày định nghĩa dãy $\{E_n\}$ và các tính chất của dãy này.

Chương 4: Một số bài toán sơ cấp ứng dụng

Trước tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới PGS.TS. Nông Quốc Chinh, người đã đặt đề tài và tận tình hướng dẫn để luận văn này được hoàn thành.

Tôi xin chân thành cảm ơn Khoa Toán - Tin, Phòng Đào Tạo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành khóa học. Tôi cũng xin được cảm ơn sự nhiệt tình giảng dạy của các thầy, cô trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt nhất tới đại gia đình, bạn bè và các anh chị em đồng nghiệp, những người luôn động viên khích lệ giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Học viên

Nguyễn Thị Kim Ngân

Chương 1

Các dãy của Roettger và các kết quả liên quan

Trong Chương 1, chúng tôi xin đưa ra khái niệm dãy Lucas, dãy Roettger, một vài tính chất cơ bản, công thức tính và một số kết quả liên quan dãy Roettger. Nội dung chương này chủ yếu theo tài liệu [1], [2] và tham khảo thêm một số tài liệu khác. Các chứng minh chi tiết các định lý và hệ quả đã được trình bày trong các tài liệu [1] và [2] nên ở đây, chúng tôi chỉ nêu kết quả chính mà không chứng minh.

1.1 Dãy số Roettger

Bài toán 1.1.1. Chứng minh rằng nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ $((p,q)=1)$ là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

thì p là ước của a_0 và q là ước của a_n.

Giải. Giả sử phân thức tối giản $\frac{p}{q}$ là nghiệm của đa thức $f(x)$. Khi đó, ta có

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Từ đó, ta có

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-2}p + a_0 q^{n-1}) \tag{1.1}$$

và

$$a_0q^n = -p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1q^{n-1}). \tag{1.2}$$

Từ (1.1) suy ra a_np^n chia hết cho q mà $(p, q) = 1$ nên a_n chia hết cho q. Từ (1.2) suy ra a_0q^n chia hết cho p mà $(p, q) = 1$ nên a_0 chia hết cho p.

Định nghĩa 1.1.2 (Dãy Lucas)**.** Gọi $p, q \in \mathbb{Z}$ là các số nguyên tố cùng nhau và α, β là các nghiệm của đa thức bậc hai

$$x^2 - px + q$$

với biệt thức $\delta = (\alpha - \beta)^2 = p^2 - 4q$. Đặt

$$u_n = u_n(p, q) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad v_n = v_n(p, q) = \alpha^n + \beta^n.$$

Khi đó, hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ được gọi là hai dãy Lucas.

Với $n = 0$, ta được $u_0 = \dfrac{1-1}{\alpha - \beta} = 0, v_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$; với $n = 1$, ta có $u_1 = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$ và $v_1 = \alpha + \beta = p$.

Ví dụ 1.1.3. Cho tam thức bậc hai

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

không thỏa mãn điều kiện $(p, q) = 1$ nên không thuộc dạng đang xét.

Ví dụ 1.1.4. Cho tam thức bậc hai $x^2 + 3x + 2$, ta được

$$u_n = \frac{(-1)^n - 2^n}{-1 - 2} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad v_n = (-1)^n + 2^n.$$

Ví dụ 1.1.5. Cho tam thức bậc hai $x^2 - 5x + 1$ (có hai nghiệm không nguyên), ta được

$$u_n = \frac{\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n - \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n}{\sqrt{21}}, \quad v_n = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

Ta vẫn có tính chất u_n, v_n là các số nguyên.

Từ định nghĩa, ta có thể chứng minh được cả hai dãy Lucas đều thỏa mãn công thức truy hồi tuyến tính

$$X_{n+1} = pX_n - qX_{n-1}.$$

Tức là ta cũng có

$$u_{n+1} = pu_n - qu_{n-1} \text{ và } v_{n+1} = pv_n - qv_{n-1},$$

trong đó $u_0 = 0, u_1 = 1$ và $v_0 = 0, v_1 = p$. Từ công thức truy hồi này, ta thể có thể tính được u_n và v_n với mọi giá trị nguyên n.

Các dãy Lucas có nhiều tính chất thú vị và có nhiều ứng dụng trong kiểm tra tính nguyên tố của số nguyên lớn, nghiệm của đồng dư thức bậc hai và bậc ba, và trong lý thuyết mật mã (xem [4]).

Roettger [2] đề xuất việc mở rộng dãy Lucas bằng cách mở rộng đa thức từ bậc 2 lên bậc n. Trong khuôn khổ luận văn này, chúng tôi chỉ trình bày giới hạn trong đa thức bậc 3. Trong trường hợp này ta gọi $P, Q, R \in \mathbb{Z}$ là các số nguyên thỏa mãn $\gcd(P, Q, R) = 1$ và gọi α, β, γ là các nghiệm của

$$h(x) = x^3 - Px^2 + Qx - R, \tag{1.3}$$

với biệt thức

$$\Delta = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 = Q^2P^2 - 4Q^3 - 4RP^3 + 18PQR - 27R^2.$$

Giả sử rằng $\Delta \neq 0$.

Định lý 1.1.6 (Định lý Vieta)**.** Ba nghiệm α, β, γ thỏa mãn công thức sau

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = P \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = Q \\ \alpha\beta\gamma = R. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.1.7 (Dãy Roettger)**.** Với P, Q, R, α, β và γ xác định như trên, đặt

$$c_n = c_n(P, Q, R) = \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\beta^n - \gamma^n)(\gamma^n - \alpha^n)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} \tag{1.4}$$

và

$$w_n = w_n(P, Q, R) = (\alpha^n + \beta^n)(\beta^n + \gamma^n)(\gamma^n + \alpha^n) - 2R^n. \tag{1.5}$$

Khi đó $\{c_n\}$ và $\{w_n\}$ được gọi là hai dãy Roettger.

Với $n = 0$ thì

$$c_0 = 0 \text{ và } w_0 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2R^0 = 6;$$